

Инвариантные торы и хаотическая динамика в нелинейном неавтономном уравнении типа Релея

Л. А. Беляков, Г. В. Белякова

НИИ ПМК ННГУ и факультет ВМК ННГУ
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603005, Россия, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10
diffequ@unn.ac.ru

Получено 17 марта 2010 г.

Для нелинейной системы типа Релея с периодическим возмущением приведены фрагменты исследований, связанные с вопросами существования хаотической динамики, а также устойчивых инвариантных торов определенных типов. Построены бифуркационные диаграммы, объясняющие характер границ областей хаотичности и областей существования инвариантных торов. Кроме этого, построены бифуркационные кривые ряда периодических движений, которые играют основную роль в сценариях образования указанных границ.

Ключевые слова: динамический хаос, замкнутая инвариантная кривая, бифуркационное множество, гомоклиническое касание, резонанс

L. A. Belyakov, G. V. Belyakova

Invariant tori and chaotic dynamics in a nonlinear nonautonomous Reyleigh-like equation

For a nonlinear Reyleigh-like system with a periodic perturbation, we give some fragments of the study to be connected with the problems of the existence of both chaotic dynamics and invariant tori of certain types. We construct bifurcation diagrams explaining a character of boundaries for regions corresponding to the existence of chaotic dynamics and the invariant tori. Besides, we construct bifurcation curves (for a series of periodic motions) which play the principal role at scenarios of creation of the boundaries pointed out.

Keywords: dynamical chaos, closed invariant curve, bifurcation set, homoclinic tangency, resonance

Mathematical Subject Classification 2000: 37C60, 37C65, 37D45, 37G99

Введение

Современные модели реальных динамических систем из различных областей знания не позволяют ограничиваться линейным приближением и часто требуют еще и учета внешних воздействий. Здесь мы приведем некоторые результаты исследований качественно-численными методами уравнения типа Релея с кубической нелинейностью (дуффинговский член), членом 5-й степени (для моделей с несколькими локальными минимумами потенциала) и неавтономным периодическим возмущением (амплитуда внешнего периодического воздействия не является малой величиной). А именно, опираясь на теоретические результаты работ [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], при изучении отображения $H(x, y) \xrightarrow{t \pmod{2\pi}} H$ по траекториям динамической системы

$$\ddot{x} - h\dot{x}(1 - x^2) + ax + k_3x^3 + k_5x^5 = \nu \sin t$$

на плоскости параметров (a, ν) в области $\{-1 < a < 1, 1, 0 \leq \nu < 1\}$ и при фиксированных $h = 0,01$, $k_3 = -0,1$, $k_5 = 0,02$ построены бифуркационные множества, соответствующие рождению и исчезновению некоторых периодических движений, замкнутых инвариантных кривых — торов в расширенном фазовом пространстве (x, y, t) , а также выделена область хаотических движений.

Напомним, что понятие «хаоса» в численных экспериментах следует, вероятнее всего, воспринимать как квазиаттрактор [2, 3].

И еще замечание о торах. Полной классификации бифуркаций торов, насколько нам известно, нет. Более того, в приложениях нет единой терминологии: тором называют отнюдь не только гладкую замкнутую кривую, но и непрерывные инвариантные многообразия. Поэтому (и тем более при численных исследованиях) точное построение бифуркационных кривых разрушения торов часто проблематично. Там, где удалось согласовать теоретические результаты и численные эксперименты, мы попытаемся объяснить механизмы разрушения торов, не претендуя на строгость в построении соответствующих бифуркационных кривых, так же, например, как при исследовании бифуркаций удвоения периода (фейгенбаумановского типа) — предельной границы. Кроме того, известно, что при разрушении инвариантного тора в его окрестности могут возникать нетривиальные притягивающие множества [2], но мы не изучаем их.

Для уравнений Релея и Ван-дер-Поля (линейных по x и автономных) существование и единственность предельного цикла доказана А. Г. Майером [1]. В нелинейном случае ситуация более сложная. На рис. 1 приведены схемы фазовых портретов нашей системы (указаны только состояния равновесия и циклы) при $\nu = 0$ и разных a на интервалах, отличающихся числом состояний равновесия и предельных циклов.

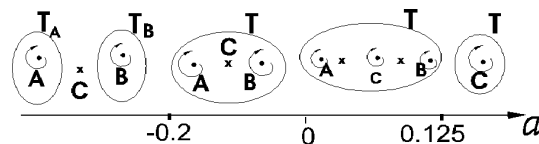


Рис. 1

Основные бифуркационные диаграммы — область хаотических движений (рис. 2), бифуркации большого T и малых торов T_A , T_B (рис. 3 и рис. 4) — содержат в основном только те бифуркационные кривые, которые участвуют в сценариях перехода к хаосу либо рождения (гибели) торов. Остальные иллюстрации не нумеруются.

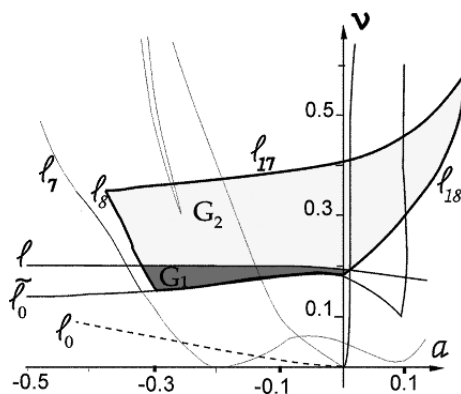


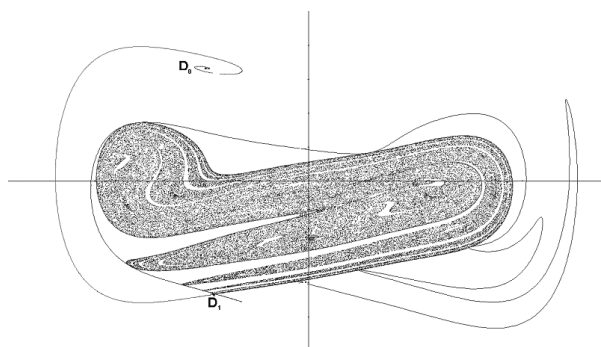
Рис. 2

1. Хаотическое множество

Хаотические движения возможны в областях G_1 и G_2 (см. рис. 2); остальными буквами обозначены:

- \tilde{l}_0 — предельная кривая серии бифуркаций удвоения периода неподвижной точки, родившейся в результате бифуркации типа седло-узел на кривой l_0 ;
- l_{18} — предельная кривая серии бифуркаций удвоения периода цикла периода 2, возникающего при седло-узловой бифуркации на кривой l_{19} (см. рис. 3);
- l — возникновение седло-узла (D_1, D_0) вне области хаотического аттрактора. Таким образом, появляется еще один аттрактор — устойчивая точка D_0 . Инвариантные кривые седловой неподвижной точки D_1 для параметров из области G_2 не пересекаются и разделяют в фазовом пространстве области притяжения хаотического аттрактора и неподвижной точки D_0 ;
- l_{17} — касание инвариантных кривых седловой точки D_1 . С увеличением параметра ν возникает трансверсальное пересечение многообразий седла и, как следствие, разрушение хаоса, т. е. из любой точки хаотической области итерационная последовательность начинает сходиться к устойчивой точке D_0 , лежащей вне области хаоса.

Иллюстрацией этой бифуркации служит фазовый портрет системы при значениях параметров $a = 0$, $\nu = 0,385$, которые близки к бифуркационным. Увеличение ν приводит к разрушению хаоса. Кроме того, получена устойчивая точка периода 5 с незначительной областью притяжения (на этом фазовом портрете она выделена цветом). В области G_2 обнаружена узкая полоса, соответствующая сосуществованию хаоса и этой устойчивой неподвижной точки.



- l_7 соответствует разрушению тора $T_A(T_B)$, в результате которого на месте $T_A(T_B)$ остаются серии устойчивых и седловых периодических точек (периода 2, 3 и т. д.) с малыми областями притяжения. Эти устойчивые точки с ростом параметра a либо исчезают через бифуркации типа седло-узел, либо меняют устойчивость;

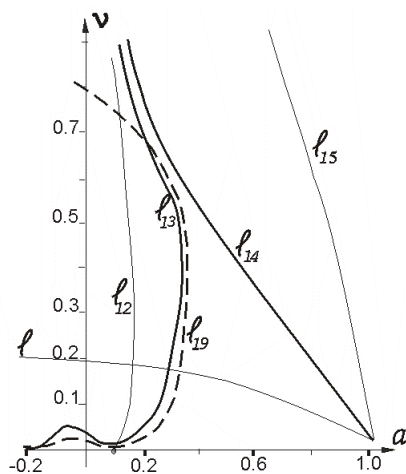


Рис. 3

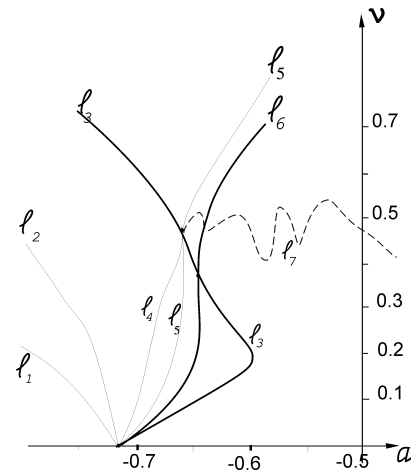


Рис. 4

l_8 — касание инвариантных кривых седловых неподвижных точек, оставшихся после разрушения тора $T_A(T_B)$, что лишает возможности итерационным последовательностям точек с начальными условиями из области хаоса сходиться к устойчивым точкам из этой серии. Таким образом, в области параметров G_2 имеется некоторая полукрестность кривой l_8 , в которой сосуществуют и хаотические движения, и эти серии устойчивых точек.

В области G_1 никаких аномальных явлений подобного типа в результате численных экспериментов не обнаружено, т. е. единственным притягивающим множеством остается хаотический аттрактор.

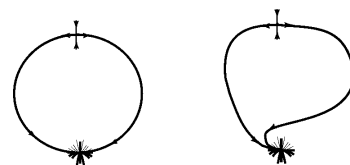
2. Бифуркации большого тора

Тор T , охватывающий всю структуру, образованную неподвижными точками A, B, C (в зависимости от интервалов по a может быть 1, 5 или 3 точки — см. рис. 1), существует в области, ограниченной кривыми l_{13}, l_{14} и отрезком оси $\{\nu = 0, -0.2 < a < 1.1\}$. Конечно, он есть и при $a > 1.1$, но мы ограничимся лишь этой областью параметров и утверждением: кривая l_{15} соответствует бифуркации типа седло-узел, и между l_{14} и l_{15} тора нет.

На кривой l_{14} тор влипает в неустойчивую неподвижную точку C , передавая ей свою устойчивость.

Между l_{14} и l_{13} есть множество бифуркационных кривых, на которых возникают седло-узловые точки различных периодов (2, 3, 5 и т. д.). Эти седло-узлы могут возникать внутри, вне и на торе. На рис. 3 построена лишь кривая l_{19} , которой соответствует рождение серии из двух седловых и устойчивых точек периода 2. Причем эта серия точек может родиться на торе (в точке касания l_{19} и l_{13}), внутри тора (справа от точки касания) и вне тора (слева от точки касания). В последнем варианте — при достаточно небольших ν — еще как-то удастся проследить сценарий разрушения тора: сепаратрисы контура родившихся на l_{19} седел начинают сближаться, тор при этом начинает терять гладкость по одному из сценариев (см. замечание ниже), его конфигурация повторяет поведение сепаратрис, и в окрестности бифуркации касания инвариантных многообразий этих седел на l_{13} тор исчезает. Из-за сложной динамики при этом [7, 8] не удалось на численном эксперименте уловить момент самого исчезновения тора.

Замечание. Среди возможных вариантов потери гладкости тора в численных экспериментах можно наблюдать, например, либо потерю гладкости при изменении типа неподвижной точки — узел становится фокусом, т. е. локальная перестройка [2, 8], либо (пока не исследованный случай) малое смещение сепаратрисы седла вне окрестности узла (на глобальном куске) приводит к ситуации, когда обе входящие в узел сепаратрисы начинают входить в узел с одной стороны, что и приводит к потере гладкости тора. Заметим, что второй вариант потери гладкости мы наблюдали при исследовании системы $x - x(h + bx^2 - x^4) + ax + k_3x^3 = \nu \sin t$ для значений параметров $h = -0,01$, $b = 0,6$, $a = -0,6$, $k_3 = 0,1$ и при изменении ν от момента рождения ($\nu = 0,01$) до явной потери гладкости ($\nu = 0,72$), однако проследить, какие при этом происходят перестройки многообразий, на численном эксперименте не удалось.



3. Бифуркации малых торов

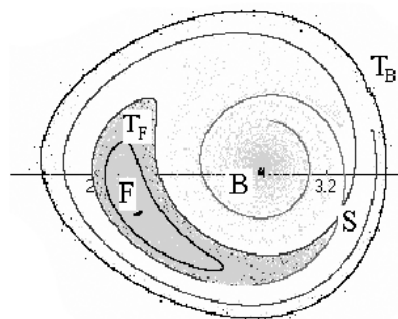
На рис. 4 представлена бифуркационная диаграмма периодических решений периода 2π , связанных с рождением (исчезновением) инвариантных торов вокруг точек A и B .

Кривая l_1 соответствует возникновению седло-узла вне тора $T_A(T_B)$. Этот седло-узел распадается на устойчивую $F_A(F_B)$ и седловую $S_A(S_B)$ точки.

При $\nu < \nu_N$, где N — точка пересечения кривых l_3 и l_6 , на кривой l_2 тор $T_A(T_B)$ исчезает, предварительно потеряв гладкость, в окрестности гомоклинической паутины седла $S_A(S_B)$, при параметрах, близких к бифуркации касания инвариантных многообразий седла.

На кривой l_4 устойчивый тор $T_A(T_B)$ снова появляется, но теперь точки $F_A(F_B)$ и $S_A(S_B)$ уже внутри тора.

На кривой l_5 возникает неустойчивый тор вокруг точки $F_A(F_B)$. На представленной иллюстрации торы T_B (устойчивый) и T_F (неустойчивый) существуют одновременно. На кривой l_6 неустойчивый тор влипает в точку $F_A(F_B)$, и она становится неустойчивой. Затем происходит слияние точки $A(B)$ с $S_A(S_B)$ и их исчезновение через бифуркацию типа седло-узел на кривой l_3 . Устойчивый тор $T_A(T_B)$ исчезает на кривой l_7 , предварительно потеряв гладкость. На интервале по ν выше точки пересечения l_3 и l_6 до точки пересечения l_5 , l_4 , l_3 бифуркации те же, за исключением того, что сначала исчезает на кривой l_3 седло-узел, а затем уже неустойчивый тор влипает на кривой l_6 в точку $F_A(F_B)$.

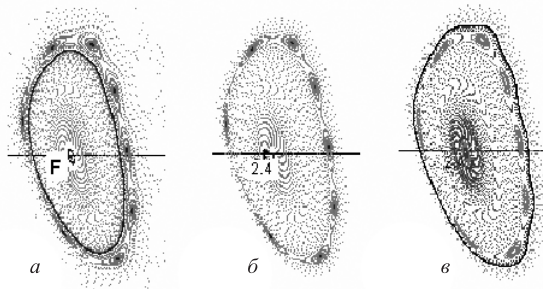


Относительно кривой l_7 необходимо сделать ряд замечаний. Во-первых, здесь вид кривой l_7 носит весьма условный характер, т. к. точно построить ее не удастся. Это, вероятно, связано с тем, что в резонансных зонах, представляющих собой видоизмененные при введении диссипативных членов языки Арнольда (см. [8]), вложены бифуркационные кривые, ограничивающие довольно узкие области отсутствия торов — эффект мерцания торов при прохождении через соответствующий каждому языку резонанс. Сам факт наличия таких структур при численных экспериментах устанавливается, однако проследить за их поведением оказывается сложно: резонансные зоны пересекаются, и их большое количество. Установлен лишь факт существования ограничивающей сверху (по ν) область жизни торов

кривой. Во-вторых, на нижнем участке кривой l_7 (см. рис. 2) также наблюдается разрушение торов с различным на отдельных интервалах кривой l_7 числом периодических точек, возникающих на торе.

При ν больших, хотя и удалось продолжить ряд бифуркационных кривых, требуется дополнительное исследование поведения торов (что, впрочем, справедливо относительно почти всех бифуркаций торов).

Прохождение через резонанс. При $\nu > 0,5$ в областях существования неустойчивых торов T_F (родившихся в окрестностях точек F_A и F_B) между кривыми l_5 и l_6 наблюдаются эффекты мерцания торов.



Это связано с бифуркациями торов типа «прохождение через резонанс» [4, 5], когда на очень узком интервале по параметру тор исчезает при приближении к резонансной цепочке и вновь появляется уже по другую сторону от нее. Здесь приведен пример реализации такого сценария при значениях параметров $\nu = 0,7$ и $a = -0,624$, $a = -0,625$, $a = -0,626$ (фазовые портреты a , $б$ и $в$ соответственно). Уровень, состоящий из неустойчивой и седловой точек периода 8, проходит неустойчивым тором его кратковременным (по параметру) исчезновением при увеличении в размере.

Отметим, что такие бифуркации «мерцания» торов наблюдаются довольно часто и не только для T_F но и для торов T_A , T_B , и для большого тора. На бифуркационных диаграммах кривые, соответствующие этому явлению, не строились.

Таким образом, приходится констатировать, что при попытке исследования поведения торов в этой системе мы получили больше вопросов, чем точных ответов. Вероятно, это связано не только с несовершенством инструментов численного исследования, но и с недостаточностью теоретических результатов для сильно нелинейных неавтономных систем, тем более — при больших амплитудах периодической силы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 08-01-00083, 07-01-00715, 09-01-97016-р Поволжье). Авторы благодарят Л. П. Шильникова за внимание к работе и весьма полезные консультации.

Список литературы

- [1] Майер А. Г. Доказательство существования предельных циклов у уравнений Релея и Ван-дер-Поля // Уч. записки Горьковского гос. ун-та, 1935, вып. 2, с. 19–30.
- [2] Афраимович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифф. уравнений: Межвуз. сб. / Е. А. Леонтович-Андроновой. Горький: ГГУ, 1983. С. 3–25.
- [3] Afraimovich V. S., Shilnikov L. P. Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence / G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. Boston: Pitman, 1983. P. 1–34.
- [4] Морозов А. Д., Шильников Л. П. О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // ПММ, 1983, т. 47, № 3, с. 385–394.

- [5] Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 424 с.
- [6] Афраймович В. С. Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 189–213.
- [7] Гонченко С. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания: Сб. статей. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 523 с.
- [8] Тураев Д. В., Шильников А. Л., Шильников Л. П. Некоторые математические проблемы классической синхронизации // Труды школы «Нелинейные волны», Н. Новгород, 2004 // А. В. Гапонова-Грехова, В. И. Некоркина. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 426–449.

